

МОДИФИКАЦИИ НА БИНАРНИ ФАЗОВО МАНИПУЛИРАНИ СИГНАЛИ С ДЪЛЖИНА $N=1 \text{ MOD } 4$ И НЕСЪГЛАСУВАНИ ФИЛТРИ ЗА ТЯХНАТА ОБРАБОТКА

Борислав Беджев¹, Пламен Янакиев²

¹ Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

² Шуменски университет „Епископ Константин Преславски“

MODIFICATIONS OF BINARY PHASE MANIPULATED SIGNALS WITH LENGTH $N=1 \text{ MOD } 4$ MISMATCHED FILTERS FOR THEIR PROCESSING

Borislav Bedzhev¹, Plamen Yanakiev²

¹ Konstantin Preslavsky University of Shumen

² Konstantin Preslavsky University of Shumen

Abstract

The phase manipulated (PM) signals which periodic autocorrelation functions (PACF) have small side-lobes are very important for the radars, sonars, radio-navigation and radio-synchronization systems. Due to this reason in the paper four approaches for diminishing of the side-lobes of the PACFs of the binary PM signals with lengths $N=1 \text{ mod } 4$, N prime, are suggested and analyzed. The results, obtained in the paper, could be applied in the process of development of new radio-communication devices, used for precise measurement of distances.

Keywords: ideal periodic autocorrelation functions; phase manipulated signals; synthesis of signals.

ВЪВЕДЕНИЕ

В типични условия приемниците на радио-комуникационните системи едновременно обработват силни (от близко разположени предаватели или обекти) и слаби (от отдалечени предаватели или обекти) сигнали. В резултат в изходите на приемниците страничните листа на периодичните автокорелационни функции (ПАКФ) на силните сигнали маскират основните (централните) листа на слабите сигнали. Тъй като много често слабите сигнали имат голяма важност (например сигнали за задимяване, пожар, висока температура, помощ и т.н.), за радио-комуникационните системи е много важно използваните сигнали да имат ПАКФ, чиито странични листа са малки. Предвид на това, сигналите, чиито ПАКФ нямат никакви странични листа и приличат на делта импулс, е прието да се наричат идеални [1].

От гледна точка на простотата и надеждността при практическата реализация, най-

предпочитани са така наречените перфектни бинарни фазово манипулирани (ФМ) сигнали, чиито ПАКФ имат странични листа с минимално възможно ниво в зависимост от тяхната дължина. По тази причина те са обект на интензивни изследвания през последните шестдесет години, но откритите до момента класове от бинарни ФМ сигнали с идеална или перфектна ПАКФ не могат да задоволят потребностите на практиката [1], [2], [3]. Отчитайки тази ситуация, целта на доклада е да се обосноват модификации на така наречените сигнали на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \text{ mod } 4$ и структурни схеми на несъгласувани филтри за тяхната обработка, чрез които се намаляват нивата на страничните листа на ПАКФ. Фокусирането на вниманието към сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \text{ mod } 4$ е продиктувано от следните обстоятелства. Първо, при тези сигнали се използва бинарна фазова манипулация и това опростява значително конструкцията на

предавателите и приемниците на радио-комуникационните системи. Второ, техните ПАКФ имат перфектна форма и е възможно странични им листа да бъдат намалени с малки загуби в пик-фактора на предавателя или в отношението сигнал/ шум по мощност на изхода на приемника.

МОДИФИКАЦИИ НА БИНАРНИ ФАЗОВО МАНИПУЛИРАНИ СИГНАЛИ С ДЪЛЖИНА $N=1 \text{ MOD } 4$ И СТРУКТУРНИ СХЕМИ НА НЕСЪГЛАСУВАНИ ФИЛТРИ ЗА ТЯХНАТА ОБРАБОТКА

За бинарните ФМ сигнали с дължина $N = p \equiv 1 \text{ mod } 4$ е в сила следната теорема [2].

Теорема 1: Бинарният ФМ сигнал, чиято дължина е просто нечетно число

$$N = p \equiv 1 \text{ mod } 4, \quad (1)$$

а отчетите му са формирани по правилото (за кодиране)

$$s(0) = \pm 1, \quad s(i) = (-1)^{\text{ind}_\theta i}, \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, p - 1,$$

имат следната ПАКФ

$$s(0) = +1 \rightarrow Q_{ss}(r) = \begin{cases} N, & r = 0, \\ 1, & \text{ind}_\theta r \equiv 0 \text{ mod } 2, \\ -3, & \text{ind}_\theta r \equiv 1 \text{ mod } 2, \end{cases} \quad (3)$$

$$s(0) = -1 \rightarrow Q_{ss}(r) = \begin{cases} N, & r = 0, \\ 1, & \text{ind}_\theta r \equiv 1 \text{ mod } 2, \\ -3, & \text{ind}_\theta r \equiv 0 \text{ mod } 2. \end{cases} \quad (4)$$

В (2), (3) и (4) индексът на i по отношение на примитивния елемент (корен) θ на полето на Галоа $GF(p)$ $\text{ind}_\theta i$ е аналог на операцията логаритмуване (в безкрайните алгебрични полета) [4]. По-конкретно, във всяко крайно алгебрично поле $GF(p^n)$ съществува най-малко един примитивен елемент θ , който се характеризира с това, че редицата

$$\theta^1 = \theta, \theta^2, \dots, \theta^{p^n-1}, \quad (5)$$

съдържа всичките $p^n - 1$ ненулеви елемента на $GF(p^n)$ [4]. По тази причина, в слу-

чаите на прости алгебрични полета, когато $n = 1$, редицата

$$\theta^1 = \theta, \theta^2, \dots, \theta^{p-1}, \quad (6)$$

е просто някаква пермутация

$$\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(p-1), \quad (7)$$

на числата

$$1, 2, \dots, p-1. \quad (8)$$

Следователно индексът на i по отношение на примитивния елемент (корен) θ се определя от равенствата

$$i = \theta^{\pi(i)} \rightarrow \text{ind}_\theta i = \pi(i), \quad i = 1, 2, \dots, p-1. \quad (9)$$

При доказателството на Теорема 1 в [5] е показано, че

$$Q_{ss}(r) = -1 + s(0)[(-1)^{\pi(r)} + (-1)^{\pi(p-r)}] = -1 + 2s(0)(-1)^{\pi(r)}. \quad (10)$$

Не е трудно да се провери, че Теорема 1 остава в сила, ако отчетите на ФМ сигнала с дължина $p \equiv 1 \text{ mod } 4$ са формирани по правилото (за кодиране) [5]

$$s(0) = \pm 1, \quad s(i) = (-1)^{\text{ind}_\theta i + 1}, \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1.$$

Бинарните ФМ сигнали, чиито отчети са формирани по правилата (за кодиране) (2) или (11), е прието да се наричат *сигнали (последователности) на квадратичните остатъци* или *сигнали (последователности) на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \text{ mod } 4$* , тъй като (2) може да се изрази и чрез символа на Лъожандър [4]

$$(-1)^{\text{ind}_\theta i} = \left(\frac{i}{p}\right) = \begin{cases} 1, & i = a^2 \\ -1, & i \neq a^2 \end{cases} \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1,$$

От (3) и (4) се вижда, че точно половината от страничните листа на ПАКФ на сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \text{ mod } 4$ имат относително високо ниво -3 . Предвид на това следва да бъде разгледана възможността за преобразуване на сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \text{ mod } 4$ в сигнали, чиито ПАКФ имат форма близка до идеалната, при запазване на

стандартната бинарна фазова манипулация. Тази цел може да се постигне като се използват два основни подхода – чрез прилагане на амплитуда манипулация при генерирането на отчета (чипа) $s(0)$ и чрез използване на несъгласуван филтър в приемника.

Първо ще бъдат анализирани възможностите за модифициране на класическите сигнали на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ чрез прилагане на амплитуда манипулация при генерирането на отчета (чипа) $s(0)$.

От (10) се вижда, че ако бъде използвано правилото за кодиране

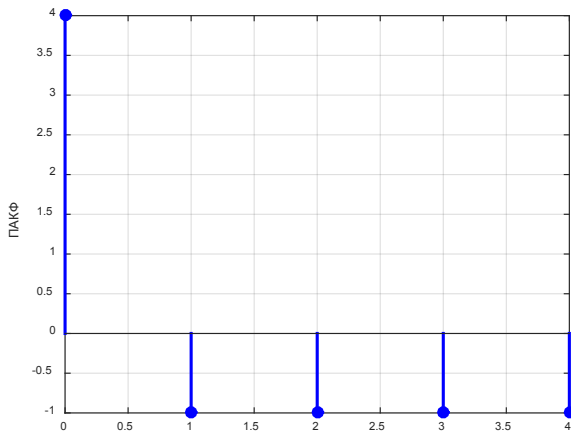
$$s(0) = 0, \quad s(i) = (-1)^{ind_{\theta} i}, \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, p - 1,$$

тогава

$$Q_{ss}(r) = -1 + 2s(0)(-1)^{\pi(r)} = -1. \quad (14)$$

Ефектът от този подход е представен на фиг. 1 и фиг. 2, където са показани ПАКФ на ФМ сигнали с дължина $N = p = 5 \equiv 1 \pmod{4}$ и $N = p = 29 \equiv 1 \pmod{4}$ съответно, чиито отчета са формирани по правилото (14).

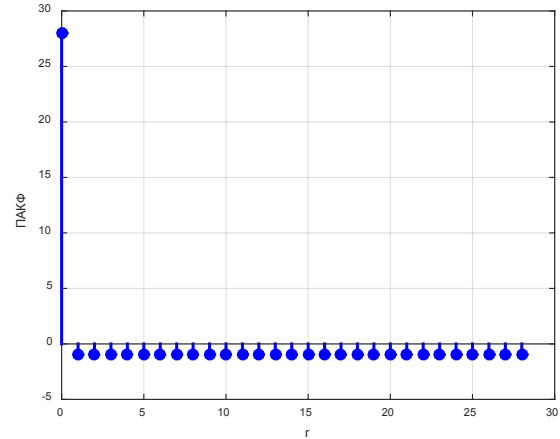


Фиг. 1: ПАКФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 5 \equiv 1 \pmod{4}$, чиито отчета са формирани по правилото (14)

От фиг. 1 и фиг. 2 се вижда, че при използване на правилото (за кодиране) (14) ФМ сигналите с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ са еквивалентни на перфектните сигнали с дължина $N = p \equiv 3 \pmod{4}$. Цената на този полезен резултат е известно увеличаване на така наречения *пик-фактор*, който изразява

отношението на максималната моментна мощност към средната мощност на предавателя

$$v_{mp/ap} = \frac{1}{\frac{N-1}{N}} = \frac{N}{N-1} = 1 + \frac{1}{N-1}. \quad (15)$$



Фиг. 2: ПАКФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 29 \equiv 1 \pmod{4}$, чиито отчета са формирани по правилото (14)

От (15) се вижда, че с нарастването на дължината на сигнала $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ пик-факторът на предавателя бързо клони към оптималната си стойност 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v_{mp/ap} = 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} = 1. \quad (16)$$

Втора възможност за модифициране на класическите сигнали на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ е използването на правилото за кодиране

$$s(0) = \pm \frac{1}{2}, \quad s(i) = (-1)^{ind_{\theta} i}, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, p - 1.$$

Тогава

$$s(0) = +\frac{1}{2} \rightarrow Q_{ss}(r) =$$

$$-1 + 2s(0)(-1)^{\pi(r)} = \begin{cases} 0, & r \equiv a^2 \pmod{p}, \\ -2, & r \not\equiv a^2 \pmod{p}, \end{cases} \quad (18)$$

$$s(0) = -\frac{1}{2} \rightarrow Q_{ss}(r) =$$

$$-1 + 2s(0)(-1)^{\pi(r)} = \begin{cases} -2, & r \equiv a^2 \pmod{p}, \\ 0, & r \not\equiv a^2 \pmod{p}. \end{cases} \quad (19)$$

Този подход е илюстриран на фиг. 3 и фиг. 4, където са показани ПАКФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 17 \equiv 1 \pmod{4}$,

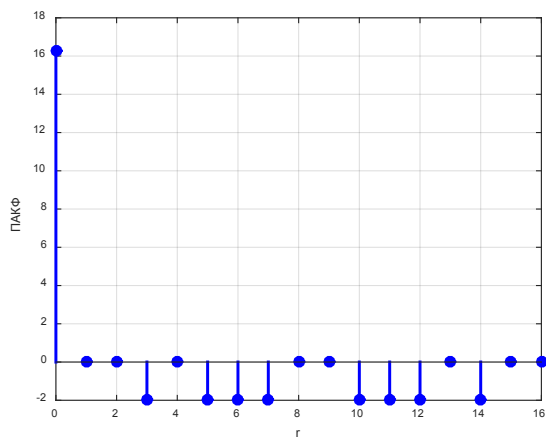
чиито отчети са формирани по правилото (17) при $s(0) = +\frac{1}{2}$ и $s(0) = -\frac{1}{2}$ съответно.

Както се вижда, при този подход отклонението на пик-фактора на предавателя е още по-малко в сравнение с предходния подход

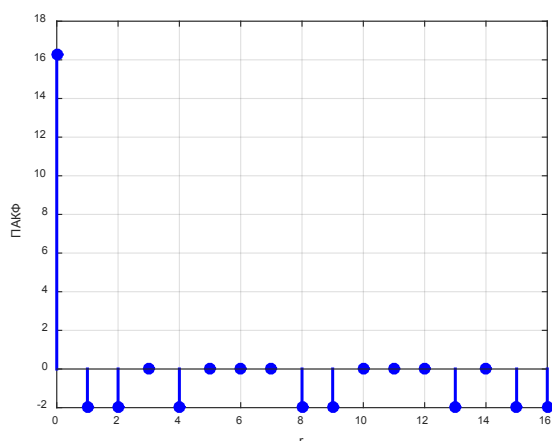
$$v_{mp/ap} = \frac{1}{\frac{N-\frac{1}{2}}{N}} = \frac{N}{N-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{N-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

От (20) се вижда, че с нарастването на дължината на сигнала $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ пик-факторът на предавателя бързо клони към оптималната си стойност 1

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v_{mp/ap} = 1 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-\frac{1}{2}} = 1. \quad (21)$$



Фиг. 3: ПAKФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 17 \equiv 1 \pmod{4}$, чиито отчети са формирани по правилото (17) $s(0) = +\frac{1}{2}$



Фиг. 4 ПAKФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 17 \equiv 1 \pmod{4}$, чиито отчети са формирани по правилото (42) $s(0) = -\frac{1}{2}$

Сега ще бъдат анализирани възможностите за подобряване формата на ПAKФ на класическите сигнали на Лъожандър с дъл-

жина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ чрез използване на несъгласуван цифров филтър в приемника.

От (10) се вижда, че при използването на класическото правило за кодиране (2) в съчетание с частично несъгласуван цифров филтър в приемника

$$s_r(0) = 0, \quad s_r(i) = \begin{cases} 1, & i = a^2, \\ -1, & i \neq a^2, \end{cases} \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1,$$

периодичната взаимно-корелационна функция (ПВКФ) на сигнала на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ и несъгласувания с него филтър (22) е

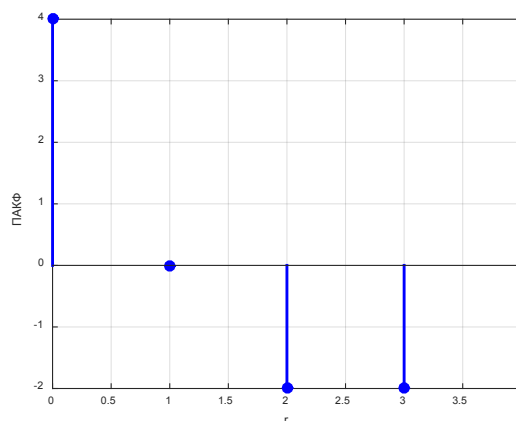
$$Q_{ss}(r) = \begin{cases} p-2 + [s(0) + s_r(0)], & r = 0, \\ -1 + (-1)^{\pi(r)}[s(0) + s_r(0)], & r \neq 0. \end{cases} \quad (23)$$

Тъй като $s_r(0) = 0$, от (23) следва че

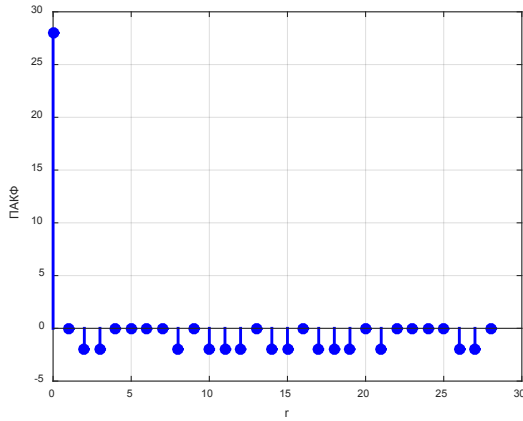
$$Q_{ss}(r) = \begin{cases} p-1, & r = 0, \\ 0, & r \neq 0 \cap \pi(r) \equiv 0 \pmod{2}, \\ -2, & r \neq 0 \cap \pi(r) \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad (24)$$

В (22), (23) и (24) с $s_r(i)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$ са означени отчетите на импулсната характеристика на цифровия филтър (ЦФ) с крайна импулсна характеристика (КИХ), чрез който се обработва приетия сигнал в приемника. Както се вижда, ЦФ с КИХ в приемника не е съгласуван със сигнала само в 0-вия отчет.

Ефектът от този подход е представен на фиг. 5 и фиг. 6, където са показани ПВКФ на ФМ сигнали с дължина $N = p = 5 \equiv 1 \pmod{4}$ и $N = p = 29 \equiv 1 \pmod{4}$ и несъгласуваните с тях ЦФ с КИХ (22) съответно.



Фиг. 5: ПВКФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 5 \equiv 1 \pmod{4}$ и несъгласувания с него филтър (22)



Фиг. 6: ПAKФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 29 \equiv 1 \pmod{4}$ и несъгласувания с него филтър (22)

От фиг. 5 и фиг. 6 се вижда, че при обработката на сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ с частично несъгласуваните с тях ЦФ (22) половината от страничните листа на ПВКФ липсват, а нивото на другата половина е -2 . Цената на този полезен резултат е известно влошаване на отношението сигнал/шум по мощност на изхода на несъгласувания ЦФ (SNR_{MMF}) в сравнение със случая на съгласуван ЦФ (SNR_{MF})

$$v_{S/N} = \frac{SNR_{MMF}}{SNR_{MF}} = \frac{N-1}{N} = 1 - \frac{1}{N}. \quad (25)$$

От (25) се вижда, че с нарастването на дължината на сигнала $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ загубите в отношението сигнал/шум по мощност на изхода на несъгласувания ЦФ (SNR_{MMF}) практически изчезват

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v_{S/N} = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} = 1. \quad (26)$$

Втори вариант за несъгласувана обработка на сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ е използването на следния частично несъгласуван ЦФ в приемника

$$s_r(0) = -(\pm 1), \quad s_r(i) = \begin{cases} 1, & i = a^2, \\ -1, & i \neq a^2, \end{cases} \quad (27)$$

$$i = 1, 2, \dots, p-1.$$

Не е трудно да се установи, че в този случай ПВКФ на сигнала и частично несъгласувания ЦФ е

$$Q_{ss}(r) = \begin{cases} p-2 + [s(0) + s_r(0)], & r = 0, \\ -1 + (-1)^{\pi(r)}[s(0) + s_r(0)], & r \neq 0. \end{cases} \quad (28)$$

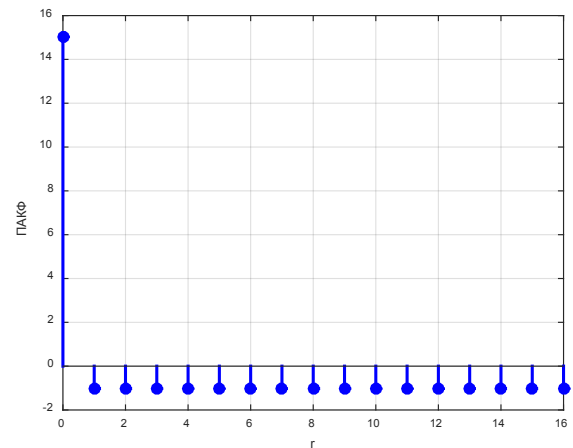
Тъй като $s_r(0) = -s(0)$, от (28) следва че

$$Q_{ss}(r) = \begin{cases} p-2, & r = 0, \\ -1, & r \neq 0. \end{cases} \quad (29)$$

Ефектът от този подход е представен на фиг. 7, където е показана ПВКФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 17 \equiv 1 \pmod{4}$ и несъгласувания с него ЦФ (27).

От фиг. 7 се вижда, че при обработка на сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ с частично несъгласуваните с тях ЦФ (28) нивото на всички странични листа на ПВКФ е -1 . Цената на този полезен резултат е известно влошаване на отношението сигнал/шум по мощност на изхода на несъгласувания ЦФ (SNR_{MMF}) в сравнение със случая на съгласуван ЦФ (SNR_{MF})

$$v_{S/N} = \frac{SNR_{MMF}}{SNR_{MF}} = \frac{N-2}{N} = 1 - \frac{2}{N}. \quad (30)$$



Фиг. 7: ПAKФ на ФМ сигнал с дължина $N = p = 17 \equiv 1 \pmod{4}$ и несъгласувания с него филтър (27)

От (30) се вижда, че с нарастването на дължината на сигнала $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ загубите в отношението сигнал/шум по мощност на изхода на несъгласувания ЦФ (SNR_{MMF}) практически изчезват

$$\lim_{N \rightarrow \infty} v_{S/N} = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} = 1. \quad (31)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ФМ сигналите, използвани в радио-комуникационните системи, трябва да отговарят на голям брой изисквания, основните от които са: простота на генерирането и обработката им, ефективно използване на електромагнитния спектър, ниска вероятност за прехващане, оптимални корелационни свойства и др. Теоретичният анализ и натрупаният практически опит показват, че тези изисквания са взаимно противоречиви. Това налага при проектирането на радио-комуникационни системи да се търси компромис между посочените изисквания. Предвид на тази ситуация в доклада са анализирани възможностите за преобразуване на перфектните бинарни ФМ сигнали с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$, наричани още сигнали на Лъожандър, в сигнали, чиито ПАКФ имат форма близка до идеалната при запазване на стандартната бинарна фазова манипулация. На тази основа са получени следните основни резултати.

Първо, обосновани са два подхода за намаляване страничните листа на ПАКФ на сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ чрез прилагане на амплитуда манипулация при генерирането на отчета (чипа) $s(0)$. При това и за двата случая е доказано, че с нарастването на дължината на сигнала $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ пик-факторът на предавателя бързо клони към оптималната си стойност 1

Второ, обосновани са два подхода за намаляване страничните листа на ПАКФ на

сигналите на Лъожандър с дължина $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ чрез използване на несъгласуван ЦФ в приемника. Освен това и за двата случая е доказано, че с нарастването на дължината на сигнала $N = p \equiv 1 \pmod{4}$ загубите в отношението сигнал/шум по мощност на изхода на несъгласувания ЦФ практически изчезват.

БЛАГОДАРНОСТИ

Настоящата статия се реализира във връзка с Проект РД-08-144/08.02.2018 г. – Интегрирана развойна тестова среда за информационна сигурност, финансиран от ШУ „Епископ Константин Преславски“.

REFERENCE

- [1] N. Levanon and E. Mozeson, Radar signals, Wiley-Interscience, 2004, 427 pp.
- [2] S. Golomb and G. Gong, Signal design for good correlation for wireless communications, cryptography and radar, Cambridge University Press, 2005, 455 pp.
- [3] V. P. Ipatov, Spread spectrum and CDMA. Principles and Applications, Willey, 2006. - 373 pp.(in Russian)
- [4] R. Lidl and H. Niederreiter, Finite fields, London: Addison-Wesley Publishing Company, 1983, 818 pp.
- [5] P. Yanakiev and Ts. Tsankov, Methodology for synthesis of perfect phase manipulated signals with length $N=1 \pmod{4}$, In: Proceedings of the International scientific conference UNITECH 2018, 16-17.11.2018, Gabrovo, Bulgaria (in press)